PAŃSTWOWA WYŻSZA SZKOŁA ZAWODOWA W CHEŁMIE
INSTYTUT MATEMATYKI i INFORMATYKI
22-100 Chełm, ul. Pocztowa 54
tel./fax. (082) 562 11 24

KONKURS MATEMATYCZNY
im. Samuela Chróścikowskiego

30 marzec 2017r. godz. 10.00

Nazwisko i imię: ....

Pesel: ....

Kategoria I **nr testu:** ....

Wyrażam zgodę na przetwarzanie moich danych osobowych w zakresie związanym z przeprowadzeniem Konkursu.

Podpis: ....

Instrukcja wstępna:

Test składa się z 20 zadań zamkniętych i 2 zadań otwartych. Każde zadanie zamknięte zawiera informacje wstępne oraz trzy propozycje rozwiązań poprzedzone pustymi prostokątami. W każdy prostokąt należy wpisać TAK lub NIE.

Za każdą z poprawnie udzielonych odpowiedzi w poszczególnych zadaniach uczestnik otrzyma 1 pkt. Jeśli wszystkie trzy udzielone odpowiedzi będą prawidłowe uczestnik dodatkowo otrzymuje 1 pkt. Brak odpowiedzi na pytanie będzie traktowane jako odpowiedź błędna. Za każde zadanie otwarte można otrzymać maksymalnie 5 pkt.

W trakcie rozwiązywania zadań pomocnicze obliczenia można wykonywać jedynie na kartkach załączonych do testu. W czasie trwania testu nie można korzystać z tablic matematycznych, kalkulatorów i innych pomocy naukowych.

POWODZENIA !!!!!!!!!!

Zadanie 1. Dane są dwa zdania:

p - suma dwóch liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną,
q - kwadrat liczby niewymiernej jest liczbą wymierną.

Prawdziwe jest wyrażenie:

a) $p \Rightarrow q$,
b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$,
c) $p \vee (q \Rightarrow p)$.

Zadanie 2. Równanie $2x^2 = xy + y^2$ opisuje na płaszczyźnie:

a) hiperbolę,
b) parabolę,
c) punkt.

Zadanie 3. Równanie $x^2 + px + q = 0$ ma dwa różne od zera pierwiastki, którymi są liczby p i q. Prawdą jest, że:

a) $p + q = 3$,
b) $p + q = -1$,
c) $p - q = 3$.

Zadanie 4. Liczba $13^n + 6$ jest podzielna przez 7 dla:

a) $n = 2016$,
b) $n = 2017$,
c) $n = 2018$.

Zadanie 5. Z cyfr 1, 2, 3, 7, 8, 9 utworzono wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach. Suma tych liczb jest:

a) większa niż 1700,
b) większa niż 1600,
c) większa niż 1500.

Zadanie 6. Prawdą jest, że:

a) $\sin 10° \cdot \sin 30° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70° = \frac{1}{16}$,
b) $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$,
c) $\cos \frac{4}{9}\pi \cdot \cos \frac{1}{9}\pi \cdot \cos \frac{2}{9}\pi = \frac{1}{9}$.

Zadanie 7. Istnieje takie $a \in \mathbb{R}$, dla którego równanie $|x + 1| + |x - 1| = a$ ma:

a) dokładnie jeden pierwiastek,
b) dokładnie dwa pierwiastki,
c) nieskończenie wiele pierwiastków.

Zadanie 8. Ciąg (a_n) jest zbieżny do zera. Zatem ciąg $(n \cdot a_n)$:

- [ ] a) może być zbieżny do zera,
- [ ] b) może być rozbieżny do nieskończoności,
- [ ] c) może być zbieżny do 2017.

Zadanie 9. Każdą z liczb ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ mnożymy przez każdą z liczb ze zbioru $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Suma wszystkich pięćdziesięciu iloczynów otrzymanych w powyższy sposób jest:

- [ ] a) większa niż 1000,
- [ ] b) większa niż 900,
- [ ] c) większa niż 800.

Zadanie 10. Pociąg o długości 100m jedzie przez tunel długości 100m z prędkością $100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Na pokonanie tego tunelu pociąg potrzebuje:

- [ ] a) więcej niż 3s,
- [ ] b) więcej niż 4s,
- [ ] c) więcej niż 5s.

Zadanie 11. Liczb pierwszych p, dla których $p + 27$ jest sześcianem liczby naturalnej jest:

- [ ] a) więcej niż 10,
- [ ] b) więcej niż 27,
- [ ] c) nieskończenie wiele.

Zadanie 12. Piszemy jednym ciągiem kolejne liczby naturalne 12345678910111213 . . .. Jaka cyfra wypadnie na 2017 miejscu:

- [ ] a) 5,
- [ ] b) 6,
- [ ] c) 7.

Zadanie 13. Liczbą pierwszą jest liczba:

- [ ] a) 201720172017,
- [ ] b) 201920182017,
- [ ] c) 329329.

Zadanie 14. Liczby dodatnie x i y spełniają warunek $x^{2106} + y^{2016} = x^{2018} + y^{2018}$. Prawdą jest, że:

- [ ] a) $x^2 + y^2 \leqslant 2$,
- [ ] b) $x^2 + y^2 > 2$,
- [ ] c) $x^2 + y^2 > 2017$.

Zadanie 15. Suma pięciu różnych liczb naturalnych jest równa 20, a iloczyn 420. Suma kwadratów tych liczb jest:

- a) większa niż 100,
- b) mniejsza niż 100,
- c) równa 100.

Zadanie 16. Zaprzeczeniem zdania: „Każda liczba rzeczywista jest dodatnia”, jest zdanie:

- a) „Każda liczba rzeczywista jest ujemna”,
- b) „Każda liczba rzeczywista jest nieujemna”,
- c) „Istnieje liczba rzeczywista dodatnia”.

Zadanie 17. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach P i Q poprowadzono wspólną styczną. Punkty A i B są punktami styczności. Suma miar kątów APB i AQB jest:

- a) większa niż $180°$,
- b) większa niż $190°$,
- c) większa niż $200°$.

Zadanie 18. Z miasta A do miasta B jest 660km. Z miasta A do miasta C jest 310km, z miasta C do miasta D jest 200km, zaś z miasta D do miasta B jest 150km. Odległość od miasta B do miasta C jest:

- a) większa niż 300km,
- b) większa niż 350km,
- c) większa niż 400km.

Zadanie 19. Pole trójkąta, którego środkowe mają długości $9,\ 12,\ 15$ jest:

- a) większe niż 65,
- b) większe niż 70,
- c) większe niż 75.

Zadanie 20. Na bokach n-kąta foremnego zbudowano na zewnątrz kwadraty. Wiadomo, że drugi $2n$-kąt, którego wierzchołkami są wierzchołki tych kwadratów nie będące wierzchołkami danego n-kąta, jest także foremny. Zatem:

- a) $n = 12$,
- b) $n = 18$,
- c) $n = 2017$.

ZADANIA OTWARTE

1. Kwadrat $ABCD$ wpisany jest w okrąg o promieniu 1. Wykaż, że dla dowolnego punktu P na okręgu
$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 8 \ .$$

2. Wykaż, że jeżeli x i y są takimi liczbami rzeczywistymi, że $x > y$ i $xy = 1$, to
$$x^2 + y^2 \geqslant 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y \ .$$

ROZWIĄZANIE:

BRUDNOPIS