PAŃSTWOWA WYŻSZA SZKOŁA ZAWODOWA W CHEŁMIE
INSTYTUT MATEMATYKI i INFORMATYKI
22-100 Chełm, ul. Pocztowa 54
tel./fax. (082) 562 11 24

KONKURS MATEMATYCZNY
im. Samuela Chróścikowskiego

30 marzec 2017r. godz. 10.00

Nazwisko i imię: ....

Pesel: ....

Kategoria II **nr testu:** ....

Wyrażam zgodę na przetwarzanie moich danych osobowych w zakresie związanym z przeprowadzeniem Konkursu.

Podpis: ....

Instrukcja wstępna:

Test składa się z 20 zadań zamkniętych i 2 zadań otwartych. Każde zadanie zamknięte zawiera informacje wstępne oraz trzy propozycje rozwiązań poprzedzone pustymi prostokątami. W każdy prostokąt należy wpisać TAK lub NIE.

Za każdą z poprawnie udzielonych odpowiedzi w poszczególnych zadaniach uczestnik otrzyma 1 pkt. Jeśli wszystkie trzy udzielone odpowiedzi będą prawidłowe uczestnik dodatkowo otrzymuje 1 pkt. Brak odpowiedzi na pytanie będzie traktowane jako odpowiedź błędna. Za każde zadanie otwarte można otrzymać maksymalnie 5 pkt.

W trakcie rozwiązywania zadań pomocnicze obliczenia można wykonywać jedynie na kartkach załączonych do testu. W czasie trwania testu nie można korzystać z tablic matematycznych, kalkulatorów i innych pomocy naukowych.

POWODZENIA !!!!!!!!!!

Zadanie 1. Dane są dwa zdania:

p - suma dwóch liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną,

q - kwadrat liczby niewymiernej jest liczbą wymierną.

Prawdziwe jest wyrażenie:

a) $(p \vee q) \Rightarrow p$,

b) $p \Rightarrow (\sim q)$,

c) $(\sim p) \Rightarrow q$.

Zadanie 2. Równanie $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ ma:

a) więcej niż jedno rozwiązanie,

b) więcej niż dwa rozwiązania,

c) więcej niż trzy rozwiązania.

Zadanie 3. Funkcją okresową nie jest funkcja:

a) $f(x) = \cos(\sqrt{2}x) + \cos x$,

b) $f(x) = \cos(\sqrt{3}x) + \cos x$,

c) $f(x) = \cos(\sqrt{4}x) + \cos x$.

Zadanie 4. Równanie $x^2 = 2xy - 2y + x$ opisuje na płaszczyźnie:

a) hiperbolę,

b) dwie proste,

c) parabolę.

Zadanie 5. Liczba $13^n + 8$ jest podzielna przez 7 dla:

a) $n = 2016$,

b) $n = 2017$,

c) $n = 2018$.

Zadanie 6. Z cyfr 1, 2, 8, 9 utworzono wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Suma tych liczb jest:

a) większa niż 100000,

b) większa niż 120000,

c) większa niż 140000.

Zadanie 7. Prawdą jest, że:

a) $\sin^2 70° \cdot \sin^2 50° \cdot \sin^2 10° = \frac{1}{64}$,

b) $\sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}$,

c) $\sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 60° \cdot \sin 80° = \frac{3}{16}$.

Zadanie 8. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym zbieżnym o ilorazie q i sumie wyrazów S. Wtedy ciąg (a_n^2) ma sumę równą:

a) S^2,

b) $a_1 \cdot q^2 \cdot S^2$,

c) $\frac{a_1}{1+q} S$.

Zadanie 9. Wielomian $W(x) = x^3 + 3ax^2 + 4a^2x - 3$, gdzie $a \in \mathbb{R}$:

a) ma dla każdego $a < 0$ tylko jedno miejsce zerowe,

b) może mieć dokładnie trzy różne miejsca zerowe,

c) może mieć dokładnie dwa różne miejsca zerowe.

Zadanie 10. Każdą z liczb ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$ mnożymy przez każdą z liczb ze zbioru $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Suma wszystkich iloczynów otrzymanych w ten sposób jest:

a) większa niż 10^8,

b) liczbą podzielną przez 2017,

c) liczbą pierwszą.

Zadanie 11. Dane są zbiory $A, B \subset \Omega$. Jeśli $P(A') = 0,5$, $P(B') = 0,5$ i $P(A \cup B) = 0,6$, to:

a) $P(A' \cup B') = 0,6$,

b) $P(A \setminus B) = 0,2$,

c) $P(B \setminus A) = 0,1$.

Zadanie 12. Niech $p > 3$. Liczby p i $10p + 1$ są pierwsze. Zatem liczbą pierwszą nie jest liczba:

a) $14p + 1$,

b) $8p + 1$,

c) $5p + 1$.

Zadanie 13. Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \sqrt[n]{\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest ciągiem:

a) zbieżnym,

b) arytmetycznym,

c) geometrycznym.

Zadanie 14. Liczba wszystkich dzielników naturalnych liczby 2016^{2017} jest liczbą:

a) podzielną przez 5,

b) parzystą,

c) podzielną przez 2018.

Zadanie 15. Równanie $x^2 + \log_3 x = 1$ ma:

a) dokładnie jedno rozwiązanie,

b) więcej niż jedno rozwiązanie,

c) mniej niż dwa rozwiązania.

Zadanie 16. Funkcja f jest parzysta i $f'(3) = 7$. Wynika stąd, że:

a) $f'(-3) = 7$,

b) $f'(-3) = -7$,

c) $f'(0) = 0$.

Zadanie 17. Na ile sposobów można wybrać pola na szachownicy 8×8, aby żadne dwa z wybranych pól nie leżały ani w jednym wierszu, ani w jednej kolumnie:

a) $56^2 \cdot 6$,

b) $\binom{8}{3} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$,

c) $8! \cdot 3!$.

Zadanie 18. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA równoległoboku $ABCD$ o polu 20. Pole czworokąta ograniczonego prostymi AM, BN, CK, DL jest:

a) mniejsze niż 6,

b) mniejsze niż 5,

c) mniejsze niż 4.

Zadanie 19. Z dowolnego punktu P wewnątrz danego kąta ostrego o wierzchołku W opuszczono na ramiona prostopadłe PA i PB. Z punktu W opuszczono prostopadłą WK na odcinek AB. Prawdą jest, że:

a) $|\sphericalangle AWK| = |\sphericalangle PWB|$,

b) $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PWB|$,

c) $|\sphericalangle AWK| < |\sphericalangle BWP|$.

Zadanie 20. Stosunek długości środkowych trójkąta wynosi $3 : 4 : 5$. Stosunek długości boków tego trójkąta jest równy:

a) $3 : 4 : 5$,

b) $4 : 5 : 6$,

c) $5 : 6 : 7$.

ZADANIA OTWARTE

1. Wykaż, że jeśli punkt P leży na łuku CD okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$, to

$$|PA| \cdot \Big(|PA| + |PC|\Big) = |PB| \cdot \Big(|PB| + |PD|\Big) \ .$$

2. Boisko ma 110 metrów długości i 67 metrów szerokości. W którym miejscu na linii bocznej boiska należy ustawić piłkę, aby szansa trafienia do bramki, która ma 7 metrów szerokości, była największa? Przyjąć, że szansa trafienia jest największa, gdy kąt widzenia bramki jest największy.

ROZWIĄZANIE:

BRUDNOPIS