PAŃSTWOWA WYŻSZA SZKOŁA ZAWODOWA W CHEŁMIE
INSTYTUT MATEMATYKI i INFORMATYKI
22-100 Chełm, ul. Pocztowa 54
tel./fax. (082) 562 11 24

KONKURS MATEMATYCZNY

im. Samuela Chróścikowskiego

8 kwiecień 2016r. godz. 10.00

Nazwisko i imię: ....

Pesel: ....

Kategoria II **nr testu:** ....

Wyrażam zgodę na przetwarzanie moich danych osobowych w zakresie związanym z przeprowadzeniem Konkursu.

Podpis: ....

Instrukcja wstępna:

Test składa się z 20 zadań zamkniętych i 2 zadań otwartych. Każde zadanie zamknięte zawiera informacje wstępne oraz trzy propozycje rozwiązań poprzedzone pustymi prostokątami. W każdy prostokąt należy wpisać TAK lub NIE.

Za każdą z poprawnie udzielonych odpowiedzi w poszczególnych zadaniach uczestnik otrzyma 1 pkt. Jeśli wszystkie trzy udzielone odpowiedzi będą prawidłowe uczestnik dodatkowo otrzymuje 1 pkt. Brak odpowiedzi na pytanie będzie traktowane jako odpowiedź błędna. Za każde zadanie otwarte można otrzymać maksymalnie 5 pkt.

W trakcie rozwiązywania zadań pomocnicze obliczenia można wykonywać jedynie na kartkach załączonych do testu. W czasie trwania testu nie można korzystać z tablic matematycznych, kalkulatorów i innych pomocy naukowych.

POWODZENIA !!!!!!!!!!

Zadanie 1. Czwartą cyfrą po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby π jest:

a) 1,

b) 3,

c) 5.

Zadanie 2. Do przedziału $(70, 80)$ należy:

a) mniej niż pięć liczb pierwszych,

b) mniej niż cztery liczby pierwsze,

c) mniej niż trzy liczby pierwsze.

Zadanie 3. Rozwinięcie dwumianu $\left(\sqrt[3]{2016^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2016^3}}\right)^{60}$ zawiera:

a) mniej niż pięć wyrazów wymiernych,

b) mniej niż cztery wyrazy wymierne,

c) mniej niż trzy wyrazy wymierne.

Zadanie 4. Różnym literom odpowiadają różne cyfry. Jeśli $P \cdot W \cdot S \cdot Z = 2016$, to:

a) $P^2 + W^2 + S^2 + Z^2 > 200$,

b) $(P + W + S + Z)! > 30^{30}$,

c) $P + W - S - Z = 0$.

Zadanie 5. Prawdą jest, że:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} 2016^{\frac{2}{x-1}} = +\infty$,

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} 2016^{\frac{2}{x-1}} = -\infty$,

c) $\lim\limits_{x\to 1} 2016^{\frac{2}{x-1}} = 1$.

Zadanie 6. W trapez równoramienny o podstawach a i b wpisano koło:

a) pole tego koła jest równe $\frac{\pi}{4}ab$,

b) obwód tego koła jest równy $2\pi ab$,

c) średnica tego koła ma długość $\frac{a+b}{2}$.

Zadanie 7. Równanie $x^2 + px + q = 0$ ma dwa różne pierwiastki, którymi są liczby $2p$ i $2q$. Zatem:

a) $pq = -\frac{1}{16}$,

b) $pq < 0$,

c) $pq = -\frac{3}{32}$.

Zadanie 8. Równanie $x^{2016} + \frac{1}{x^{2016}} = 1 + x^{2017}$ ma:

- [ ] a) dokładnie jedno rozwiązanie,
- [ ] b) więcej niż jedno rozwiązanie,
- [ ] c) 2016 różnych rozwiązań.

Zadanie 9. Moneta o średnicy 1 cm toczy się po obwodzie dziesięciokąta foremnego o boku 1 cm tak długo, aż powróci do położenia początkowego. Droga, którą zakreśli środek monety ma długość:

- [ ] a) większą niż 12 cm,
- [ ] b) większą niż 13 cm,
- [ ] c) większą niż 14 cm.

Zadanie 10. Równanie $y^2 + 4x^2 = 4xy + 2x - y$ opisuje na płaszczyźnie:

- [ ] a) parabolę,
- [ ] b) dwie proste,
- [ ] c) dwie proste równoległe.

Zadanie 11. Liczba $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą:

- [ ] a) całkowitą,
- [ ] b) parzystą,
- [ ] c) pierwszą.

Zadanie 12. Dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność:

- [ ] a) $2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2016 > 0$,
- [ ] b) $2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 100 > 0$,
- [ ] c) $2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 > 0$.

Zadanie 13. Polem rombu o obwodzie $4k$ nie może być:

- [ ] a) $\frac{1}{4}k^2$,
- [ ] b) $\sqrt{2}k^2$,
- [ ] c) $\frac{\pi k^2}{4}$.

Zadanie 14. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Zatem:

- [ ] a) najmniejszą wartością funkcji f jest -1,
- [ ] b) największą wartością funkcji f jest 3,
- [ ] c) zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -\frac{1}{8}, 3\rangle$.

Zadanie 15. Ciąg (a_n) dany jest wzorem $a_n = \frac{n^3+4}{n+2}$. Liczba wyrazów całkowitych tego ciągu jest:

☐ a) większa od 5,

☐ b) większa od 6,

☐ c) większa od 2016.

Zadanie 16. Liczba $\log_{16}\left(2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2016}\right)$ jest:

☐ a) parzysta,

☐ b) całkowita,

☐ c) wymierna.

Zadanie 17. Część wspólna sześcianu i płaszczyzny może być:

☐ a) pięciokątem,

☐ b) sześciokątem foremnym,

☐ c) trójkątem rozwartokątnym.

Zadanie 18. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości 1. Odległość pomiędzy prostymi $A'B$ i $B'C$ jest:

☐ a) większa niż $\frac{\sqrt{2}}{3}$,

☐ b) większa niż $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

☐ c) równa $\frac{1}{3}$.

Zadanie 19. Liczb siedmiocyfrowych będących wielokrotnością liczby 3, których każda cyfra to 1, 5 albo 9 jest:

☐ a) więcej niż 500,

☐ b) więcej niż 700,

☐ c) więcej niż 900.

Zadanie 20. Przy okrągłym stole zasiada losowo 10 osób, a wśród nich rodzice z dwójką dzieci. Prawdopodobieństwo tego, że dzieci usiądą bezpośrednio między rodzicami jest:

☐ a) mniejsze niż 0,01,

☐ b) większe niż 0,001,

☐ c) równe $\frac{4}{10!}$.

ZADANIA OTWARTE

1. Niech $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{2016}$ będą liczbami dodatnimi takimi, że ich suma jest równa 1. Wykaż, że
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{2016}} \geqslant 2016^2\ .$$

2. Wewnątrz trójkąta ABC o polu równym $\frac{1}{4}$ zaznaczono punkt P. Wykaż, że
$$|PA|\cdot|BC|+|PB|\cdot|AC|+|PC|\cdot|AB| \geqslant 1\ .$$

ROZWIĄZANIE:

BRUDNOPIS